

Protótipo 1 – Problema da Wyndor Glass Co. (HL¹, §3.1, pág. 24)

A *WYNDOR GLASS CO.* fabrica produtos de vidro de alta qualidade, nomeadamente janelas e portas. A empresa tem três fábricas: **F1**, **F2** e **F3**. Em **F1** fabrica-se caixilharia de alumínio. A caixilharia de madeira é feita em **F2**. Em **F3** é produzido o vidro e feita a montagem das portas e janelas.

Tendo-se verificado perdas de rentabilidade, a direcção decidiu reformular a linha de produção. Assim, decidiu interromper a produção de artigos não rentáveis, com vista a libertar capacidade produtiva que permita iniciar o fabrico de um ou dois novos produtos que têm sido procurados. Um destes novos produtos (**P1**) é uma porta de vidro com caixilharia de alumínio. O outro produto (**P2**) é uma janela com caixilharia de madeira. Estes produtos são fabricados em lotes e o departamento de marketing informou que toda a produção destes novos produtos seria vendida. No entanto, uma vez que a capacidade produtiva tem que ser repartida entre ambos os produtos na fábrica **F3** e não sendo clara a forma mais lucrativa de o fazer, a direcção pediu ao departamento de Investigação Operacional (IO) para estudar a questão.

Após algum trabalho de investigação o departamento de IO determinou:

- o número de horas máquina (h.m.) semanais de cada fábrica disponíveis para a produção dos novos produtos;
- o número de h.m. semanais de cada fábrica requeridas para produzir cada lote de cada um dos novos produtos;
- o lucro que se obtém, por lote produzido de cada um dos novos produtos.

Toda esta informação foi resumida na tabela seguinte:

| fábrica | h.m. necessárias à produção de um lote de | | h.m. disponíveis por semana (capacidade disponível) |
|---------------------------------|--|-----------|---|
| | P1 | P2 | |
| F1 | 1 | 0 | 4 |
| F2 | 0 | 2 | 12 |
| F3 | 3 | 2 | 18 |
| lucro por lote produzido (u.m.) | 3 | 5 | |

A direcção da empresa pretende saber o número de lotes de portas e janelas a produzir por semana, de forma a maximizar o lucro, não excedendo as capacidades disponíveis das três fábricas.

- a) Formule e resolva o problema.
- b) Considerando o mesmo conjunto de soluções admissíveis determine o conjunto de soluções óptimas se se pretender:
b.1) $\text{Max } Z = 5x_1 + x_2$; **b.2)** $\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$; **b.3)** $\text{Min } Z = -x_1 + x_2$;
b.4) $\text{Min } Z = x_1 - x_2$; **b.5)** $\text{Max } Z = x_1$; **b.6)** $\text{Max } Z = 4x_2$.
- c) A direcção da empresa pretende saber quais as consequências de ser exigido um lucro mínimo de 50 u.m.
- d) Resolva o problema inicial, mas supondo que as fábricas **F2** e **F3** têm capacidade ilimitada. Repita a alínea **b)** com esta nova região admissível.
- e) Considere que as 18 h.m. semanais disponíveis em **F3** têm que ser todas usadas. Mantendo as restantes condições iniciais, indique, justificando, qual a região admissível e a respetiva solução ótima.
- f) Resolva o problema inicial considerando que a quantidade de janelas não pode ser inferior ao quádruplo da de portas.

Protótipo 2 – Problema da Profit & Gambit Co. (HHSS², §2.6, pág. 36)

A *PROFIT GAMBIT CO.* fabrica produtos de limpeza doméstica. A empresa pretende expandir-se no mercado e foi decidido fazer uma campanha publicitária baseada em três produtos: *spray* tira nódoas, novo detergente líquido para roupa e detergente tradicional, em pó, também para roupa.

A campanha abrangerá um canal de TV e um jornal diário. O detergente líquido será o único anunciado na TV, sendo os anúncios de imprensa destinados aos três produtos. A gerência estabeleceu objetivos mínimos para a campanha:

- o *spray* tira nódoas deve aumentar a sua cota de mercado 3%;
- o novo detergente líquido deve aumentar a sua cota de mercado 18%;
- o detergente em pó deve aumentar a sua cota de mercado 4%.

Segue-se, por cada unidade de anúncio dos produtos, o acréscimo estimado nas respetivas cotas de mercado (uma unidade é um bloco de anúncios). A última linha mostra o custo (em u.m.) por unidade para cada um dos tipos de anúncio.

| | TV | jornal |
|--------------------------|-----|--------|
| <i>spray</i> tira nódoas | 0% | 1% |
| detergente líquido | 3% | 2% |
| detergente em pó | -1% | 4% |
| custo (u.m.) | 1 | 2 |

Pretende-se determinar a quantidade de anúncios da campanha em cada um dos referidos meios de comunicação que permita atingir os objetivos da campanha a um custo total mínimo. Formalize e resolva graficamente e pelo Solver este problema.

Formulações em PL - Exercícios

Formule os problemas que se seguem no contexto da PL e resolva-os utilizando o Solver/Excel.

- a) (HL¹, 3.1-11., pág. 78) Uma fábrica tem capacidade de produção subutilizada devido ao cancelamento de uma certa linha de produtos. Essa capacidade vai ser aproveitada para produzir pelo menos um de três novos produtos: **1**, **2** e **3**. O número de horas disponíveis semanalmente nas máquinas **A**, **B** e **C**, onde os produtos são fabricados, é de 500, 350 e 150, respetivamente.

O número de horas de cada máquina necessárias à produção unitária dos produtos é dado na tabela seguinte:

| tipo de máquina | produto 1 | produto 2 | produto 3 |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| A | 9 | 3 | 5 |
| B | 5 | 4 | 0 |
| C | 3 | 0 | 2 |

O departamento de vendas informou que a venda do produto **1** será dupla da do produto **2** e que não será possível vender mais do que 20 unidades do produto **3**, por semana. Por cada unidade vendida dos produtos **1**, **2** e **3** obter-se-á um lucro de 50, 20 e 25 u.m. Formule e resolva o problema, sabendo que se pretende maximizar o lucro.

- b) Uma exploração agrícola familiar tem 125 hectares de terra arável e a família dispõe de 4 000 u.m. para investir. Na sua totalidade os membros da família podem trabalhar 3 500 horas nos meses de inverno e 4 000 h nos meses de verão. No caso de não serem precisas todas as horas disponíveis podem trabalhar em outras quintas por 0.5 u.m./h nos meses de inverno e por 0.6 u.m./h nos meses de verão, revertendo os salários para a família.

Na quinta cultiva-se o campo e faz-se criação de animais: vacas e galinhas. Cada vaca necessita de um investimento de 120 u.m. e cada galinha de 0.9 u.m. Cada vaca exige 1.5 hectares de terra, 100 h de trabalho durante o inverno, 50 h durante o verão e espera-se que dê um lucro de 100 u.m./ano.

Por sua vez as galinhas não precisam de terra, mas apenas de 0.6 h de trabalho durante o inverno e 0.3 h durante o verão, por cada uma, estimando-se um lucro unitário de 0.5 u.m./ano.

É possível ter, no máximo, 32 vacas e 3 000 galinhas. Em relação às culturas sabe-se que se semeará soja, milho e aveia. Prevê-se que o número de horas de trabalho necessário por hectare seja, para cada uma das culturas, dado por:

| | soja | milho | aveia |
|--------------------------------|------|-------|-------|
| n.º de horas no inverno | 20 | 35 | 10 |
| n.º de horas de verão | 50 | 75 | 40 |
| lucro anual por hectare (u.m.) | 60 | 90 | 45 |

Determine a melhor forma de otimizar o rendimento da família. (Nota: Na formulação admita que todas as quantidades são divisíveis.)

- c) Uma fábrica têxtil importa três tipos de fio - algodão, lã e fibra - para produzir três tipos de tecido - **T1**, **T2** e **T3**. Os tecidos têm que obedecer aos seguintes padrões:

| tecido | padrão | preço de venda (u.m./kg) |
|-----------|--|--------------------------|
| T1 | pelo menos 60% de algodão e no máximo 20% de fibra | 680 |
| T2 | no máximo 60% de fibra e pelo menos 15% de lã | 570 |
| T3 | no máximo 50% de fibra | 450 |

Pretende-se determinar a política que maximiza os lucros, sabendo que as disponibilidades de fio e os respetivos custos são:

| fio | disponibilidades (em kg) | custos (u.m./kg) |
|---------|--------------------------|------------------|
| algodão | 2 000 | 700 |
| lã | 2 500 | 500 |
| fibra | 1 200 | 400 |

- d) Uma empresa tem ao seu serviço 100 operários especializados, 230 operários semiespecializados e 80 operários não especializados. Os operários semiespecializados podem passar a operários especializados se frequentarem, durante um ano, cursos de formação que custam 500 u.m. por formando. Os operários não especializados podem passar a semiespecializados mediante a frequência de cursos de igual duração, mas que custam apenas 350 u.m. por formando.

A empresa pretende planear a formação do seu pessoal durante os próximos dois anos, para que no fim do período de planeamento:

- a mão de obra não especializada não represente mais 10% do total;
- pelo menos 40% dos trabalhadores tenham frequentado cursos de especialização;
- pelo menos 35% dos gastos em formação tenham sido feitos com operários não especializados.

Quanto precisa a empresa de gastar em formação?

- e) (HL¹, 8.2-9, pág. 351) Uma empresa energética está a preparar um plano para instalação de sistemas de energia nas novas construções. As necessidades dos clientes estão divididas em: eletricidade, água quente e aquecimento (do ambiente). De acordo com as previsões, as necessidades diárias destes bens/serviços são as seguintes: eletricidade – 30 unidades; água quente – 20 unidades; aquecimento – 50 unidades. Estes três bens (chamados *utilities*) podem ser obtidos a partir de energia elétrica, de gás natural e de painéis solares. Devido à limitação dos telhados, só há capacidade para fornecimento de 30 unidades de energia a partir desta fonte. Por outro lado, as necessidades de eletricidade só podem ser satisfeitas a partir da compra de energia elétrica. A água quente e o aquecimento podem também ser obtidos a partir das fontes gás natural e painéis solares.

Cada unidade de eletricidade custa 50€. Os custos unitários (em €/unidade) associados à produção das restantes *utilities*, consoante a forma de energia utilizada, são os seguintes:

| | energia elétrica | gás natural | painéis solares |
|-------------|------------------|-------------|-----------------|
| água quente | 150 | 110 | 70 |
| aquecimento | 140 | 100 | 90 |

Pretende-se minimizar o custo total de satisfazer as necessidades energéticas dos clientes.

- f) Uma unidade industrial usa substâncias químicas no fabrico de um determinado produto. Para o efeito tem disponíveis 30 toneladas (t) da substância química **A**, e 10 t da substância **B**. Cada unidade do produto é vendida a 30 u.m., e para a sua produção são necessárias 5 t de **A** e 1 t de **B**. A unidade industrial pode comprar mais toneladas da substância **A**, por 4 u.m./t, ou vender a quantidade que lhe sobrar exatamente pelo mesmo preço. Pretende-se saber que decisão tomar.
- g) (HL¹, 3.4-13., pág. 82) Um investidor pretende saber como aplicar 60 000 u.m. que tem disponíveis, de forma a conseguir a máxima remuneração possível ao fim de 5 anos. No início de cada ano pode investir em 2 tipos de atividades rentáveis, **A** e **B**. Por cada u.m. investida em **A** no início de um ano, recebe 1.4 u.m. (isto é, um lucro de 40%) dois anos mais tarde, a tempo de serem reinvestidos. Por cada u.m. investida em **B** no início de um ano, recebe 1.7 u.m. três anos mais tarde. Além destas, existem outras atividades rentáveis, **C** e **D**, que só estarão disponíveis mais tarde. Por cada u.m. investida em **C** no início do segundo ano, recebe 1.9 u.m. no final dos 5 anos. **D** origina um lucro de 30 % ao ano, mas só estará disponível no início do 5º ano.

Formule este problema em PL, sabendo que no fim do 5º ano o investidor pretende ter todo o dinheiro disponível. Resolva-o usando o Solver/Excel.

- h) (HL¹, ex. 3.2-3, pág. 79) O Sr. X deseja investir 6 000 u.m. que acabou de ganhar no totoloto. Sabendo isto, dois amigos seus, o Pedro e a Joana, ofereceram-lhe oportunidade de negócios. Em ambos os casos, o Sr. X deve investir algum do seu tempo nas próximas férias, além de dinheiro. Tornar-se sócio a tempo inteiro no negócio do Pedro requer um investimento de 5 000 u.m. e 400 horas, podendo-se estimar um lucro (ignorando o valor do seu tempo de férias) de 4 500 u.m. Os valores correspondentes para o negócio com a Joana são de 4 000 u.m. e 500 h, com um lucro estimado em 4 500 u.m. Nem o Pedro nem a Joana exigem exclusividade, ou seja, nenhum deles se importa que o Sr. X seja sócio de ambos, sendo tanto a sua parte do lucro, como do capital investido, proporcionais ao tempo despendido em cada negócio. Estando o Sr. X interessado em despendar algum do seu tempo em trabalho durante as referidas férias (nunca mais de 600 h), formalize o problema que pretende determinar qual a combinação que fará mais sentido.
- 1) Represente graficamente a região admissível.
 - 2) Calcule o valor da função objectivo para cada um dos pontos extremos da região admissível. Com base nestes cálculos identifique a solução ótima.
 - 3) No gráfico identifique as possíveis sequências de soluções que serão encontradas se resolver o problema pelo algoritmo do Simplex.
 - 4) Identifique a solução básica admissível correspondente a cada ponto extremo da região admissível, calculando o valor das variáveis desvio. Para cada solução básica admissível, identifique quais as variáveis não básicas.

¹ Hillier, Lieberman, "Introduction to Operations Research", 9ª ed, McGraw-Hill, 2010.

² Hillier, Hillier, Schmedders, Stephens, "Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets", 3ª ed, McGraw-Hill, 2008.